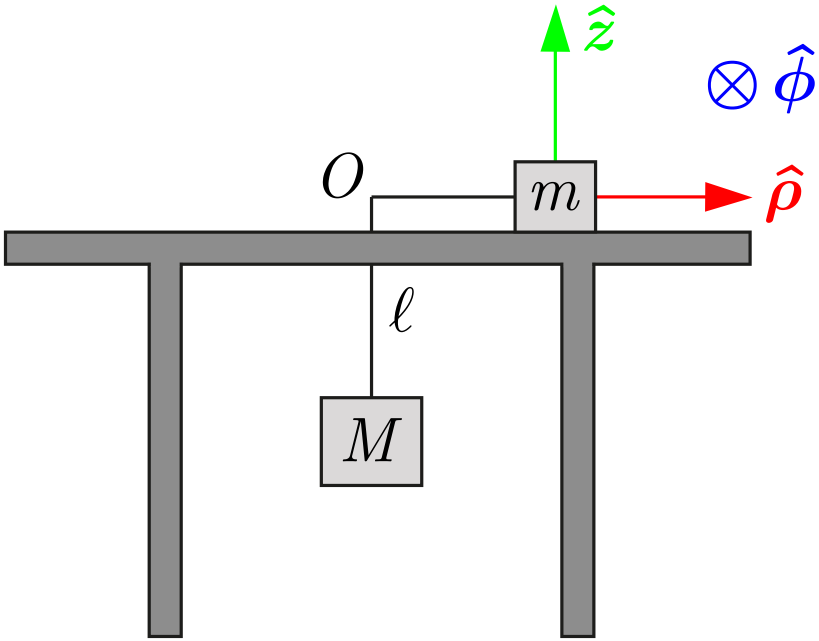
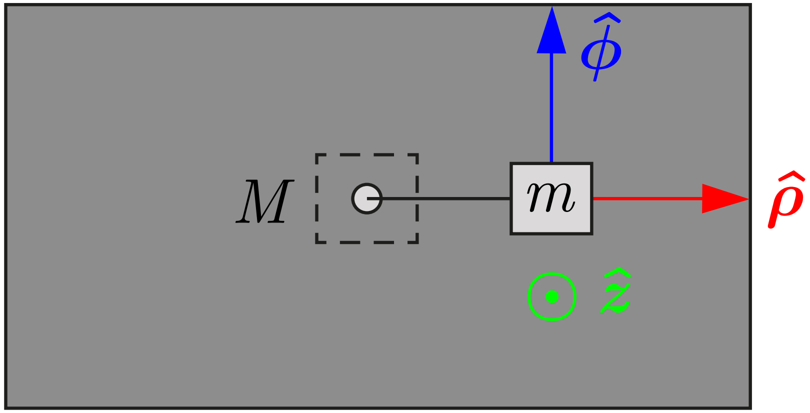
# Applications - Chapitre 9

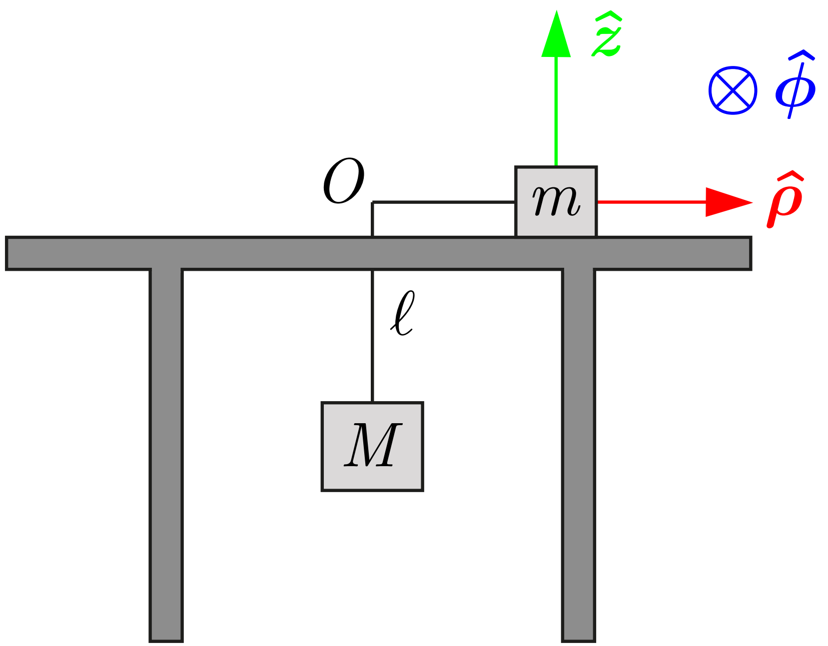
## Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

EPFL




- Une table horizontale est percée d'un trou. Une masse $m$ glisse sans frottement sur la table. Elle est attachée à un fil de masse négligeable qui coulisse sans frottement à travers le trou. Un contrepoids de masse $M$ est attaché à l'autre extrémité du fil de longueur $\ell$.




1. Masse $m$ :
   - Energie cinétique : $$(A.9.1)$$

$$T_m =$$

   - Energie potentielle : (réf. table)

$$V_m = \qquad (A.9.2)$$

2. Masse $M$ :
   - Energie cinétique :

$$T_M = \qquad (A.9.3)$$

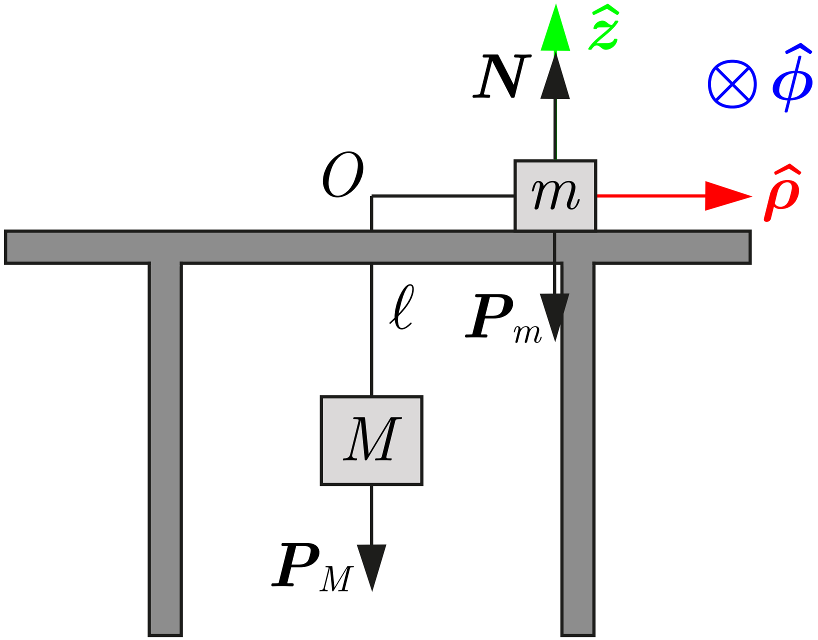
   - Energie potentielle : (réf. table)

$$V_M = \qquad \text{où} \qquad (A.9.4)$$

- Longueur du fil : $(z < 0)$

$$(A.9.5)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.9.6)$$




- Energie mécanique :

$$E = E_m + E_M =$$

$$=$$

$$= \qquad (A.9.7)$$

- Moment cinétique évalué en $O$ :

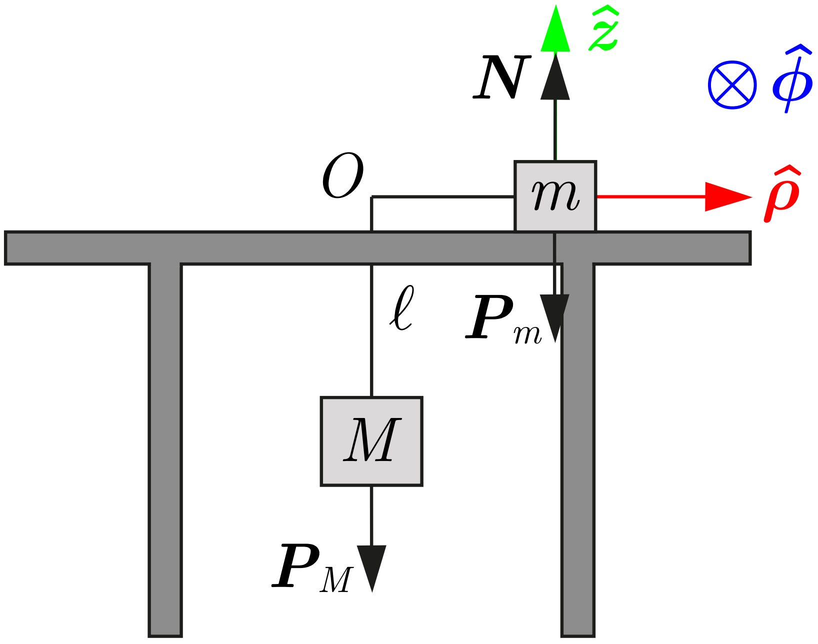
$$(A.9.8)$$

- Mouvement plan : masse $m$

$$(A.9.9)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.9.10)$$




$\Rightarrow$ $$(A.9.11)$$

- Energie mécanique :

$$(A.9.12)$$

- Energie mécanique :

$$(A.9.13)$$

- Le premier terme est l'énergie cinétique radiale, le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation et le dernier est l'énergie potentielle gravitationnelle.
- Conservation de l'énergie : $E = \text{cste}$

$$(A.9.14)$$

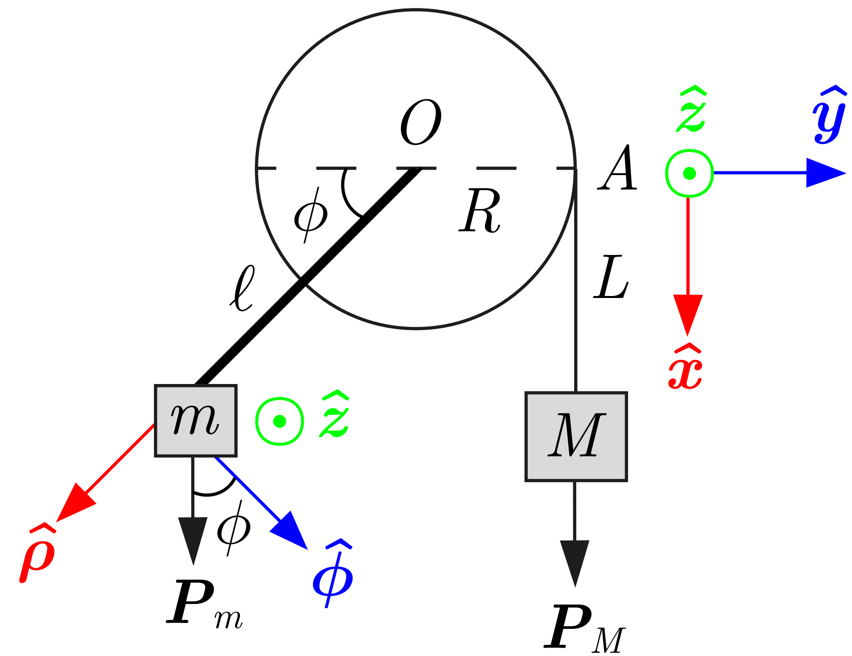
- Equation du mouvement :

$$(A.9.15)$$

- Mouvement circulaire uniforme :

$$(A.9.16)$$

- Un disque de rayon $R$ et de masse négligeable tourne verticalement autour de son centre $O$. Une barre de longueur $\ell$ et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse $m$ se trouve à l'extrémité de la barre.




- Un contrepoids de masse $M$ est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. Le système est à l'équilibre.

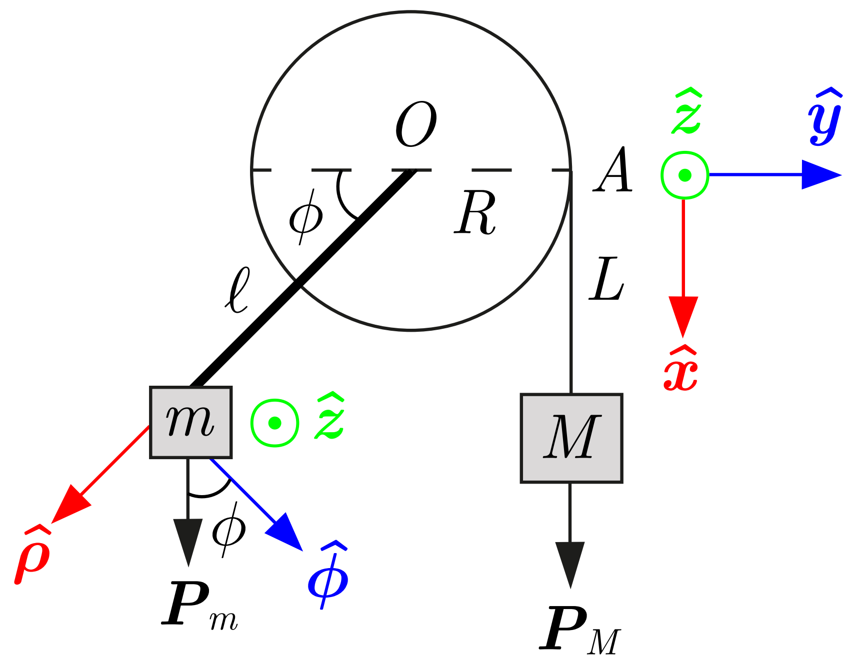
- D'après le théorème du moment cinétique, à l'équilibre, la somme des moments de forces extérieures s'annule. Par conséquent, à l'équilibre, la somme vectorielle des moments de force dus aux poids $\boldsymbol{P}_m$ et $\boldsymbol{P}_M$ s'annule.

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.9.17)$$

- Equilibre en rotation : $(A.9.18)$

- Moments de force :




1. $(A.9.19)$

2. $(A.9.20)$

- Equilibre en rotation : $(\phi \equiv \phi_0)$

selon $\hat{\boldsymbol{z}}$ : $(A.9.21)$

$\Rightarrow$ $(A.9.22)$

- Condition d'équilibre : mathématique

$$(A.9.23)$$

- Interprétation physique :

  Pour un disque de rayon $R$ donné et des masses $M$ et $m$ fixées, la barre doit être assez longue pour que l'équilibre existe.

- Angles d'équilibre :

$$(A.9.24)$$

  Il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre $O$ du cercle.

- Pour déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre, on choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle cette droite horizontale passant par le point $O$.

## A.9.2 Equilibre en rotation

- Energie potentielle : longueur du fil :

$$(A.9.24)$$

- Positions d'équilibre :

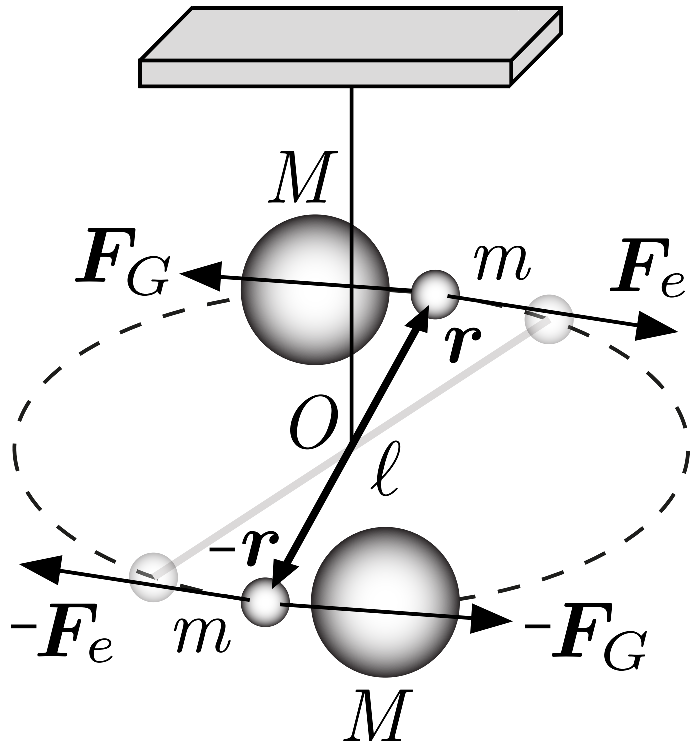
$$(A.9.25)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.9.26)$$

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \qquad (A.9.27)$$

1. Si $\qquad \Rightarrow \qquad \Rightarrow$ équilibre stable (dessous)
2. Si $\qquad \Rightarrow \qquad \Rightarrow$ équilibre instable (dessus)




- Deux petites masses identiques $m$ sont montées sur une tige horizontale de longueur $\ell$ et de masse négligeable attachée en son centre $O$ à un fil vertical. Deux grandes masses identiques $M$ sont fixées de manière symétrique à proximité des petites masses dans le plan horizontal.

- Le couple de forces gravitationnelles $\boldsymbol{F}_G$ entre les petites et grandes masses génère un moment de forces gravitationnelles résultant $\boldsymbol{M}_{G,O}$. L'élasticité du fil de torsion vertical génère un couple de forces élastiques $\boldsymbol{F}_e$ qui donne lieu un moment de forces élastiques résultant $\boldsymbol{M}_{e,O}$.

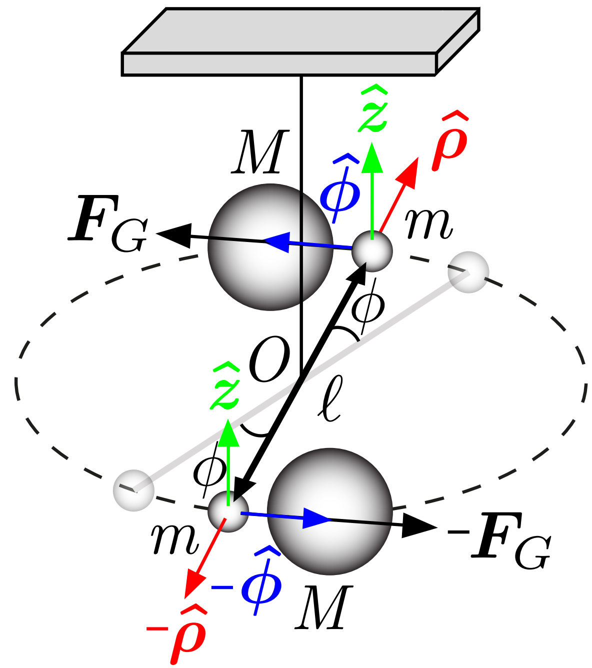
- Moments de forces extérieures : tige

1. Moment de forces gravitationnelles : deux masses

   - Vecteurs position : arrière et avant

   - Forces de la gravitation : tige $\quad (d \ll \ell)$

   - Moment de forces gravitationnelles :




$$(A.9.29)$$

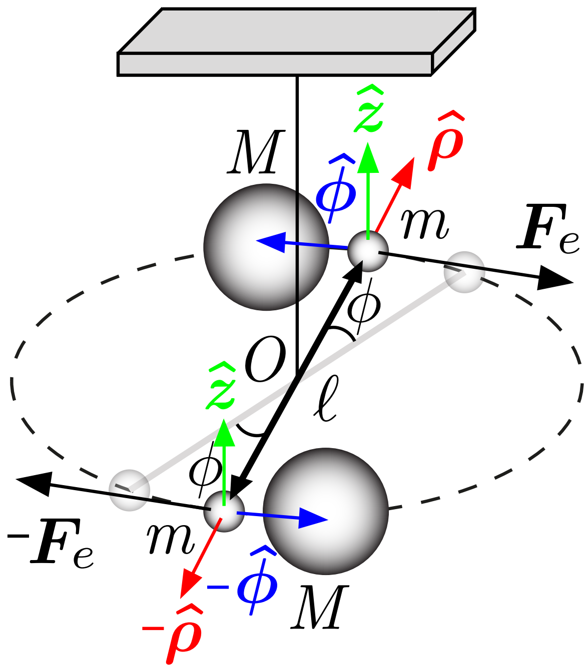
- Moment de forces élastiques : tige ($\phi \ll 1$)

2. Moment de forces élastiques : deux masses

   - Vecteurs déplacement : arrière et avant

   - Forces élastiques : tige

   - Moment de forces élastiques :




$$(A.9.30)$$

- Equilibre en rotation : tige

$$(A.9.31)$$

- Equilibre en rotation : $\phi = \phi_0$

selon $\hat{\boldsymbol{z}}$ :

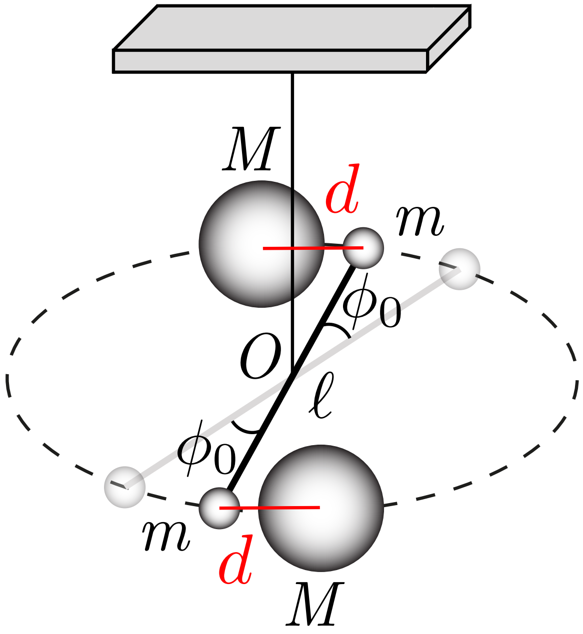
$$(A.9.32)$$

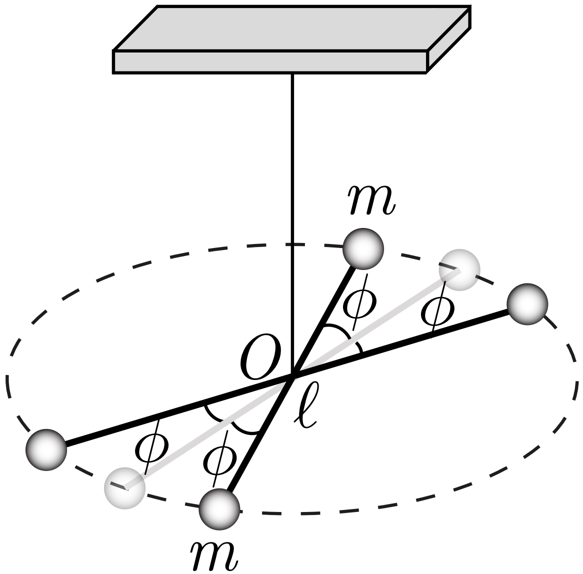
- Constante de la gravitation :

$$(A.9.33)$$

- Pour déterminer la constante élastique $k$, on mesure la période $T$ des petites oscillations des petites masses autour de l'équilibre initial en absence des grandes masses.

$$(A.9.34)$$



- Constante de la gravitation :

$$G = \frac{k\,\ell\,d^2\phi_0}{2\,M\,m} \qquad (A.9.33)$$

- Période : oscillations de la tige

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (A.9.34)$$

- Constante de la gravitation :

$$(A.9.35)$$